13/10/2015

- Επανάληψη του $\mathbb{R}^n$ ως Ευκλείδιου δ.χ πάνω από το $\mathbb{R}$

- Ευκλείδια νόρμα: $\|\bar{x}\| := \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$, $\forall\ \bar{x}\in\mathbb{R}^n$, με

- $\|\bar{x}\| \geq 0$, $\forall\ \bar{x}\in\mathbb{R}^n$, και "=" μόνο αν $\bar{x}=\bar{0}$
- $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha|\,\|\bar{x}\|$, $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$ $\forall\ \bar{x}\in\mathbb{R}^n$
- $\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$, $\forall\ \bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$

Με χρήση της νόρμας $\|\bar{x}\|$, δηλαδή του μήκους του $\bar{x}$, μπορούμε να ορίσουμε την απόσταση (ή μετρική) στον $\mathbb{R}^n$, μεταξύ δυο οποιοδήποτε σημείων του, $\|\bar{x}-\bar{y}\|$

[Μετρικές στον $\mathbb{R}^n$ - Ιδιότητες] (Επανάληψη από 8/10/15)

- $\|\bar{x}-\bar{y}\| \geq 0$, $\forall\ \bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$ και $\bar{x}=\bar{y} \iff \|\bar{x}-\bar{y}\|=0$
- $\|\bar{x}-\bar{y}\| = \|\bar{y}-\bar{x}\|$, $\forall\ \bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$
- $\|\bar{x}-\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{z}\| + \|\bar{z}-\bar{y}\|$, $\forall\ \bar{x},\bar{y},\bar{z}\in\mathbb{R}^n$

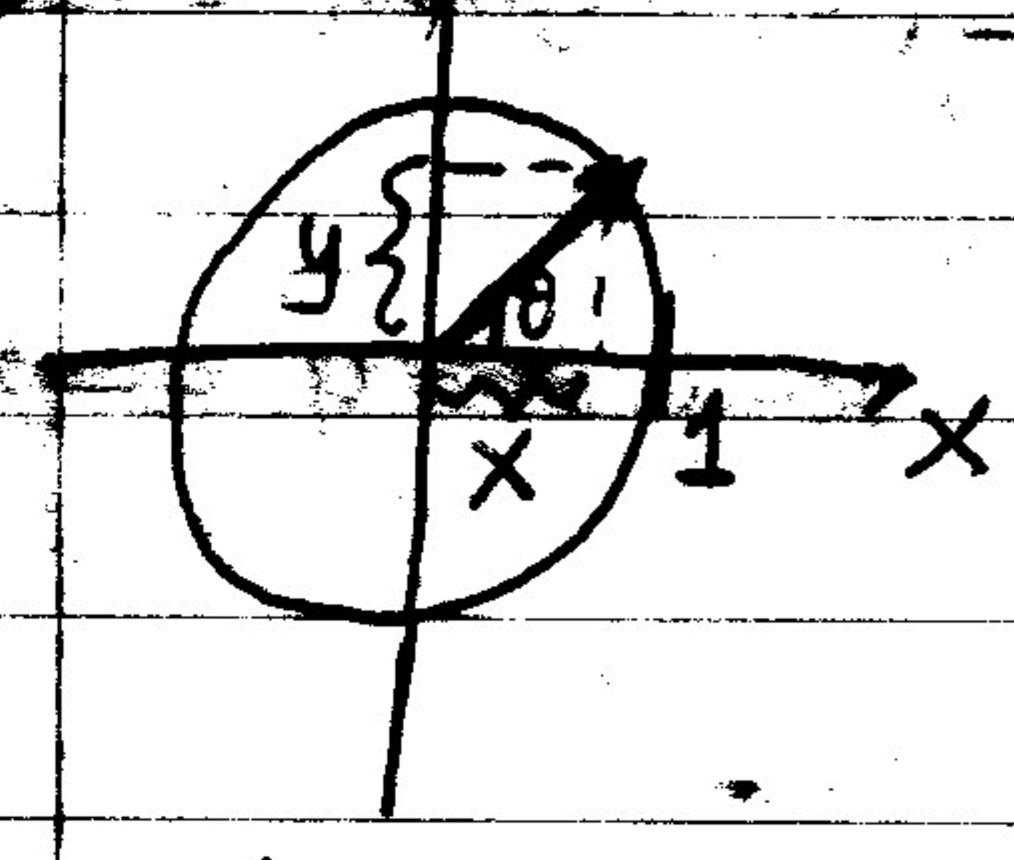
Παρατήρηση: Η ευθεία που περνάει από το σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ με κατεύθυνση $\bar{y} \neq \bar{0}$ είναι η $\{\bar{x}+\lambda\bar{y} : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$

Το επίπεδο που περιέχει το $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ και παράγεται από τα $\bar{y}, \bar{z} \neq \bar{0}$ είναι το $\{\bar{x}+\lambda\bar{y}+\mu\bar{z} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$.

$\forall\, \bar{x}, \bar{y} \neq \bar{0}$, $\cos\theta = \dfrac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\,\|\bar{y}\|}$, όπου

$\theta \in [0, \pi]$ η γωνία μεταξύ των $\bar{x}, \bar{y}$, δηλαδή η γωνία που σχηματίζουν τα $\bar{x}, \bar{y}$ στο "επίπεδο που παράγουν.

//



$(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\| = 1$

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\theta \\ y &= \sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \ (\text{Π. Θεωρ})$$

Από την άλλη, $(x,y) = x\underbrace{(1,0)}_{\bar{e}_1} + y\underbrace{(0,1)}_{\bar{e}_2}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} (x,y)\cdot(1,0) &= x \\ (x,y)\cdot(0,1) &= y \end{aligned}} \ (*)$$

($E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ η ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$)

Σύμφωνα με το (★) θα πρέπει:

κάθετο στο (x_1, y_1)

$$\frac{(x_2, y_2)}{\|(x_2, y_2)\|} = \cos\theta \frac{(x_1, y_1)}{\|(x_1, y_1)\|} + \sin\theta \frac{(-y_1, x_1)}{\|(-y_1, x_1)\|}$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{(x_2, y_2)\cdot(x_1, y_1)}{\|(x_2, y_2)\|\,\|(x_1, y_1)\|}, \quad \sin\theta = \frac{(x_2, y_2)\cdot(-y_1, x_1)}{\|(x_2, y_2)\|\,\|(-y_1, x_1)\|}$$

Τοπολογικές Ιδιότητες του $\mathbb{R}^n$

Περιοχές του $\bar{X}_0$

$$B(\bar{X}_0, r) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \ \|\bar{x} - \bar{X}_0\| < r,\ r>0\}$$

→ **Ανοιχτή Μπάλα** κέντρου $\bar{X}_0$ ακτίνας r

$$\bar{B}(\bar{X}_0, r) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \ \|\bar{x} - \bar{X}_0\| \le r,\ r>0\}$$

→ **Κλειστή Μπάλα** κέντρου $\bar{X}_0$ ακτίνας r

$$\partial B(\bar{X}_0, r) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \ \|\bar{x} - \bar{X}_0\| = r,\ r>0\}$$

(ΚΕΛΥΦΟΣ)
→ **Υπερ. σφαίρα** κέντρου $\bar{X}_0$ ακτίνας r
(n-διάστατη – σύνορο του χωρίου)

Ανοιχτή μπάλα: Σύνολο σημείων του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν $0 \le d < r$ από το δοθέν σημείο X_0

Κλειστή μπάλα: Σύνολο σημείων του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν $0 < d \le r$ από το δοθέν σημείο X_0

Υπερ. σφαίρα: Σύνολο σημείων του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν ακριβώς απόσταση $d = r$ από το δοθέν σημείο X_0.

Παράδειγμα: Στο $\mathbb{R}$, με την Ευκλείδια μετρική, η ανοιχτή μπάλα εμφανίζεται ως ανοιχτό διάστημα, $(X_0 - r, X_0 + r)$, με:

$$B(X_0, r) := \{ x \in \mathbb{R} : \| x - X_0 \| < r \}$$, ενώ

η κλειστή μπάλα εμφανίζεται ως κλειστό διάστημα, $[X_0 - r, X_0 + r]$, με:

$$\bar{B}(X_0, r) = \{ x \in \mathbb{R} : \| x - X_0 \| \leq r \}$$

Στον $\mathbb{R}^2$, με την Ευκλείδια μετρική, η ανοιχτή μπάλα εμφανίζεται ως ανοιχτός δίσκος με κέντρο $\bar{X}_0$ και ακτίνα r, (δηλαδή ο δίσκος χωρίς τον κύκλο: $(X_1 - X_{01})^2 + (X_2 - X_{02})^2 = r^2$), με:

$$B(\bar{X}_0, r) := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \| \bar{x} - \bar{X}_0 \| < r \}$$

$$= \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(X_1 - X_{01})^2 + (X_2 - X_{02})^2} < r \}$$

$$= \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 : (X_1 - X_{01})^2 + (X_2 - X_{02})^2 < r^2 \}$$, ενώ

η κλειστή μπάλα εμφανίζεται ως δίσκος με κέντρο $\bar{X}_0$ και ακτίνα r, δηλαδή ομοίως με παραπάνω

$$\bar{B}(\bar{X}_0, r) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R} : (X_1 - X_{01})^2 + (X_2 - X_{02})^2 \leq r^2 \}$$

Στον $\mathbb{R}^3$, με την Ευκλείδια μετρική, η ανοιχτή μπάλα εμφανίζεται ως περιεχόμενο σφαίρας, με κέντρο $\bar{X}_0$ και ακτίνα r, με

$$B(\bar{X}_0, r) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\bar{x} - \bar{X}_0\| < r\}$$

$$= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(X_1 - X_{01})^2 + (X_2 - X_{02})^2 + (X_3 - X_{03})^2} < r\}$$

$$= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 : (X_1 - X_{01})^2 + (X_2 - X_{02})^2 + (X_3 - X_{03})^2 < r^2\}$$

, ενώ η κλειστή μπάλα είναι ολόκληρη η σφαίρα, με κέντρο $\bar{X}_0$ και ακτίνα r.

Παρατήρηση: Γενικεύοντας τα προαναφερθέντα, στον $\mathbb{R}^n$, με την Ευκλείδια μετρική, έχω τα εξής:

- Ανοιχτή μπάλα $\longrightarrow$ Περιεχόμενο "υπερ" σφαίρας, με κέντρο $\bar{X}_0$ και ακτίνα r.

- Κλειστή μπάλα $\longrightarrow$ Ολόκληρη* η "υπερ" σφαίρα, με κέντρο $\bar{X}_0$ και ακτίνα r.

*μαζί με το κέλυφος που αντιστοιχεί στην ισότητα

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>ανοιχτό</u>,
αν:
$$(\forall \bar{X}_0 \in U_1 \ \exists \varepsilon_0 > 0) : B(\bar{X}_0, \varepsilon_0) \subset U_1,$$

δηλαδή η ανοιχτή μπάλα με κέντρο $\bar{X}_0$ και ακτίνα ε_0 να είναι υποσύνολο του U_1

Ένα υποσύνολο $U_2 \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται <u>κλειστό</u>,
αν:
$$\mathbb{R}^n \setminus U_2 = U_2^c \text{ είναι ανοιχτό σύνολο}$$
(χρήση συμπληρώματος).

Παρατήρηση: Υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που δεν είναι ούτε ανοιχτά και ούτε κλειστά.
(Π.χ στο $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$, διαστήματα $(\alpha, b]$, $[\alpha, b)$, ...)

Πρόταση (1): Η ανοιχτή μπάλα $B(\bar{X}_0, r) := \{\bar{x} \in \mathbb{R} : \|\bar{x} - \bar{X}_0\| < r\}$ $\subset \mathbb{R}^n$, είναι ένα ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη | Έστω $\bar{x} \in B(\bar{X}_0, r)$. Τότε $\|\bar{x} - \bar{X}_0\| < r$
Οπότε $\varepsilon = r - \|\bar{x} - \bar{X}_0\| > 0$.
Αρκεί νδο $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset B(\bar{X}_0, r)$.
Έστω $\bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$, τότε $\|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon$, όμως από την ιδιότητα μετρικής, έχω $\|\bar{y} - \bar{X}_0\| \le \|\bar{x} - \bar{X}_0\| + \|\bar{y} - \bar{x}\|$ $< r - \varepsilon + \varepsilon = r$, δηλαδή $\bar{y} \in B(\bar{X}_0, r)$.

Πρόταση (2) Κάθε ανοιχτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}^n$, είναι μια ένωση ανοιχτών μπαλών του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη | $(\forall\, \bar{x}_0 \in V\ \exists\, \varepsilon_{x_0} > 0) : B(\bar{x}_0, \varepsilon) \subset V$,

τότε όμως $\displaystyle\bigcup_{\bar{x}_0 \in V} B(\bar{x}_0, \varepsilon_{x_0}) = V$